Bolyai János élete és geometriája

A görbült fizikai terek geometriájának problémáját a relativitáselmélet vetette fel. A görbült tér elméleti matematikai lehetőségét azonban már évtizedekkel korábban csaknem egyszerre felfedezte három zseniális matematikus, a magyar **Bolyai** János, a német Johann Carl Friedrich **Gauss** és az orosz Nyikolaj Ivanovics **Lobacsevszkij**.

Két évszázaddal ezelőtt a geometria fogalma még azonos volt az Eukleidész által kidolgozott klasszikus, euklideszi geometriával. E geometria V. axiómája két évezreden keresztül vita tárgyát képezte. Ez az axióma azt mondta ki, hogy ha van egy egyenes, és rajta kívül egy pont, akkor erre a pontra egy és csakis egy olyan egyenes fektethető, amely párhuzamos az adott egyenessel.

Bár e tétel helyességét általában nem vitatták, továbbra is kérdés maradt, hogy ez valóban axióma-e, vagy olyan tétel, amely a többi axiómából levezethető. Ez a kérdés, vagyis a „paralellák problémája" két évszázaddal ezelőtt még megoldatlan volt.

Az említett három matematikus az 1820-30-as években azt a fajta geometriát fedezte fel, amelyben a nevezetes V. axióma nem érvényes. Más szóval: felismerték, hogy elvileg létezhet görbült homogén izotróp tér. Ezt a fajta teret ma hiperbolikusan görbült térnek nevezik.

Néhány évtizeddel később, 1854-ben Georg Friedrich Bernhard **Riemann** publikálta egy másik fajta görbült tér, mégpedig a szférikusan illetve elliptikusan görbül tér elméleti lehetőségét. Míg a Bolyai–Gauss–Lobacsevszkij térben az egyenes melletti pontra nemcsak egyetlen párhuzamos fektethető, addig a Riemann térben erre a pontra egyáltalán nem fektethető párhuzamos egyenes.

Bolyai János élete

Bolyai János 1802. dec. 15-én született Kolozsvárott. Apja, a matematikus Bolyai Farkas ekkor 27 éves volt.

Bolyai János kitűnő szellemi képességei már kisgyerekként megmutatkoztak. Hat éves korában megtanult olvasni, hétéves korában hegedülni, 10 évesen vonósnégyesekben első hegedűs volt, és 15 éves korában osztályelsőként érettségizett Marosvásárhelyen.

Apja Göttingenbe szerette volna küldeni, hogy a világhírű matematikus Gauss tanítványa lehessen, ez a terve azonban meghiúsult. Később Bécsbe, a Császári és Királyi Mérnökakadémiára iratkozott be, ahol hadmérnöki oklevelet szerzett, és 1823. szeptemberben Temesváron alhadnagyi rangban megkezdte katonai pályafutását.

1832-ben másodosztályú kapitánnyá (századossá) léptették elő, ámde nem sokkal később, 1833-ban rossz egészségi állapota miatt „félrokkantként" a hadseregtől nyugállományba helyezték. Ekkor Marosvásárhelyre költözött.

Innen 1834-ben élettársával – későbbi feleségével – átköltözött apja birtokára, Domándra, és különféle matematikai problémákon dolgozott. 1846-ban visszaköltözött Marosvásárhelyre, ahol azonban az „inzsenér kapitányt" valamiféle habókos különcnek tartotta az úri társaság.

Bolyai János 1860-ban halt meg Marosvásárhelyen tüdőgyulladásban, szinte mindenkitől elfeledve, és itt is temették el a református egyház szertartása szerint. A temetésén a katonai kíséret mellett mindössze három ember jelent meg.

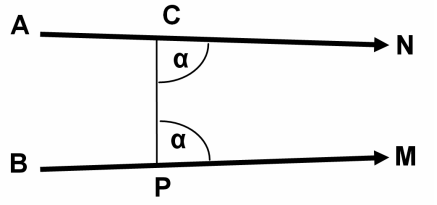
Bolyai János a „paralellák" problémájával 18 évesen kezdett foglalkozni, erről azonban apja igyekezett lebeszélni. A nem euklideszi geometria ötlete 1823-ban merült fel benne. Ettől kezdve egyre alaposabban kidolgozta az elmélet részleteit. Az ezt bemutató műve, az Appendix, 1832-ben jelent meg, függelékként apja Tentamen c. két kötetes matematikai művéhez.

A mű az Akadémia (akkori nevén: Tudós Társaság) könyvtárába is bekerült, de vagy nem olvasták el a tudósok, vagy nem értették meg, mert 1844-ben pályázatot írtak ki ugyanennek a problémának megoldására.

Még a könyv megjelenése előtt apját, Bolyai Farkast akadémiai levelező taggá választották. Fia, Bolyai János professzori címet sem kapott.

Bolyai János geometriája

Bolyai a párhuzamosság fogalmát félegyenesekre értelmezte. Eszerint két félegyenes akkor párhuzamos, ha azok egy síkban fekszenek és folyamatosan közelednek egymáshoz, de egymást soha el nem érik. Bolyai jellegzetes szemléltető rajza az ***1. ábrán*** látható.



1. ábra

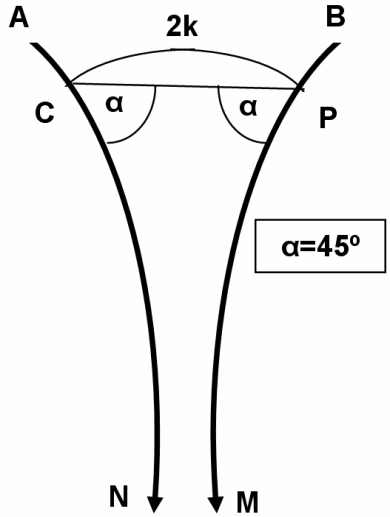
Az ábrán a párhuzamos **AN** és **BM** félegyeneseken elhelyezkedő **C** és **P** pontok un. *korrespondáló pontok*, mivel az ezeket összekötő egyenes szakasz mindkét félegyenessel azonos **α** belső szöget, un. „párhuzamossági szöget" zár be. Bolyai szerint az un. *izogonális megfeleltetés* elve szerint két párhuzamos félegyenes esetén ezek bármelyikén bármelyik ponthoz hozzárendelhető a másik félegyenesen egy és csakis egy korrespondáló pont.

Bolyai geometriájában fontos szerepet játszik a *paraszféra* és a *paraciklus* fogalma.

A *paraszféra* valamely **AN** félegyenes tetszőleges **C** pontjához tartozó olyan felület, amely az **AN** félegyenessel párhuzamos valamennyi félegyenes **C**-vel korrespondáló pontjainak halmaza. Az **AN** félegyenes a paraszféra „tengelye", ugyanakkor elvileg tengely lehet bármelyik másik párhuzamos félegyenes is, mivel a paraszféra bármely tengelyére nézve önmagával egybevágó.

Definíció szerint a *paraciklus* olyan vonal, amelyet úgy kapunk, hogy a paraszférát metsszük a paraszféra két tetszőleges tengelye által meghatározott síkkal.

Bolyai kimutatta, hogy ha az így definiált paraciklust bármelyik tengelye körül megforgatjuk, az végigsúrolja a teljes paraszférát.



2. ábra

Bolyai geometriája tehát a hiperbolikusan görbült homogén izotróp térben elhelyezkedő félegyenesek, paraszférák és paraciklusok geometriája.

Felvethető a kérdés, hogy ha a tér görbült, mekkora a görbültsége. Bolyai erre vonatkozóan definiált egy **k** paramétert, amely a görbültség mértékére jellemző. Minél kisebb a **k** paraméter, annál görbültebb a tér.

Bolyai definíciója szerint a **k** paraméter annak a paraciklus ívszakasznak a fél-hossza, amelyhez **α**=45 fok párhuzamossági szög tartozik. E definíció magyarázata a következő:

Az ***1.*** és ***2. ábrák*** szerint, ha a két párhuzamos félegyenes korrespondáló pontjait összekötő **CP** egyenes szakaszt a félegyenesek **N** ill. **M** végtelen pontjainak irányába elmozdítjuk, akkor az ábrákon feltüntetett **α** belső szög tart a derékszöghöz. Ha pedig a **CP** egyenes szakaszt ellenkező irányba mozgatjuk, az **α** belső szög egyre nagyobb lesz.

Mozgassuk ezt a szakaszt oda, ahol az **α** belső szög éppen 45 fok, és kössük össze a **C** és **P** pontokat a ***2. ábra*** szerint egy olyan paraciklus ívvel, amely olyan paraszférán fekszik, amelynek az **AN** és **BM** félegyenesek a tengelyei. A **k** paraméter ekkor a **C** és **P** pontokat összekötő paraciklus ívszakasz hosszának a fele.

Bolyai megfogalmazott több olyan geometriai tételt, amelyekben a **k** paraméter szerepet játszik, és kimutatta, hogy ha a **k** paraméter tart a végtelenhez, akkor a **k** paramétert tartalmazó geometriai képletek az euklideszi geometria összefüggéseihez konvergálnak.

A Bolyai geometriában a háromszög szögeinek összege mindig kisebb, mint 180 fok, és a 180 foktól való eltérés az un. defektus. Hasonlóan, egy négyszög belső szögeinek összege mindig kisebb, mint 360 fok, és ez esetben is lehet definiálni egy fentihez hasonló defektust. Bolyai kimutatta, hogy egy egyenlő oldalú háromszög, vagy egy négyzet területe arányos a defektussal és az arányossági tényező a **k** paraméter négyzete.

Bolyai szerint nehéz eldönteni, hogy a tér, amelyben élünk, görbült-e, és ha igen, milyen mértékben. Ennek méréssel való meghatározása azonban csaknem lehetetlen, mivel a **k** paraméter nagyon nagy, és ezért a valóságos tér majdnem euklideszi jellegű.

Bolyai szerint a kérdés megválaszolása a gravitáció vizsgálatával volna lehetséges, mivel a gravitációs erő fordítva arányos annak a gömbnek a felszínével, amelynek a sugara megegyezik az egymást vonzó testek közötti távolsággal. A hiperbolikus geometriában pedig a gömbök felszíne úgy aránylik egymáshoz, mint a főkörük kerületének négyzete.

Ebben a vonatkozásban Bolyai János a korát meghaladó zseniális megérzést mondott ki. Albert Einstein volt az, aki csaknem egy évszázaddal később bebizonyította, hogy a térnek tényleg lehet görbültsége, és a görbület kapcsolatban van a nagy tömegű égitestek gravitációs hatásával.

Dr. Héjjas István

IRODALOM

Bolyai János: Appendix, a tér tudománya, Akadémiai Kiadó, Bp. 1977.
Alexits György: Bolyai János világa, Akadémiai Kiadó, Bp. 1977.
Oláh-Gál Róbert: Bolyai Farkas feladatai, Élet és Tudomány, LXI. évf. 35. szám, 2006. szept. 1.